

Note utili per il calcolo di integrali di frazioni con denominatori di secondo grado e 1 al numeratore

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$$

Premessa. È utile riferirsi ai seguenti due casi:

$$1. \int \frac{1}{x^2 - k} dx = \int \frac{1}{(x - \sqrt{k}) \cdot (x + \sqrt{k})} dx = \frac{1}{2\sqrt{k}} \int \frac{1}{x - \sqrt{k}} dx - \frac{1}{2\sqrt{k}} \int \frac{1}{x + \sqrt{k}} dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln|x - \sqrt{k}| - \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln|x + \sqrt{k}| + c = \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{k}}{x + \sqrt{k}} \right| + c$$

Generalizzazione per funzione composta

$$\int \frac{1}{[f(x)]^2 - k} \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2\sqrt{k}} \cdot \ln \left| \frac{f(x) - \sqrt{k}}{f(x) + \sqrt{k}} \right| + c$$

$$2. \int \frac{1}{x^2 + k} dx = \frac{1}{k} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{k} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} dx = \frac{\sqrt{k}}{k} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right) + c$$

Generalizzazione per funzione composta

$$\int \frac{1}{[f(x)]^2 + k} \cdot f'(x) dx = \frac{\sqrt{k}}{k} \cdot \arctan\left(\frac{f(x)}{\sqrt{k}}\right) + c$$

Si possono presentare i seguenti casi:

1. $\Delta > 0$; in tal caso si procede con la scomposizione della frazione (A, B); tale procedimento risulta poco agevole nel caso in cui ci siano soluzioni irrazionali. E' allora utile riferirsi al caso 1
2. $\Delta < 0$; si trasforma per poi riferirsi al caso 2
3. $\Delta = 0$; si tratta come $\int [f(x)]^{-2} \cdot f'(x) \cdot dx$

Esempi

1. $\int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx$ caso $\Delta > 0$ con denominatore scomponibile (soluzioni razionali)
2. $\int \frac{1}{x^2 + 2x - 2} dx$ caso $\Delta > 0$ con denominatore non scomponibile (soluzioni irrazionali)
3. $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$ caso $\Delta < 0$
4. $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 4} dx$ caso $\Delta = 0$

Svolgimento:

1. $\int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx = \int \frac{1}{(x+3) \cdot (x-2)} dx =$
 $-\frac{1}{5} \int \frac{1}{x+3} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-2} dx = \frac{1}{5} \cdot (\ln|x-2| - \ln|x+3|) + c = \frac{1}{5} \cdot \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| + c$
2. $\int \frac{1}{x^2 + 2x - 2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 - 3} dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x+1-\sqrt{3}}{x+1+\sqrt{3}} \right| + c$
3. $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = \arctan(x+1) + c$
4. $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 4} dx = \int (x+2)^{-2} dx = -\frac{1}{x+2} + c$